第４講　微分法・積分法②

1　平面上に放物線 $y=x^2-5x+6$ と直線 $y=kax-a^2-5a$ がある.

(1)　すべての実数 a に対して放物線と直線が異なる２点で交わるような定数 k の範囲を求めよ.

(2)　(1)で求めた範囲にあって，放物線と直線で囲まれる部分の面積が a によらず一定になるような定数 k を求めよ.

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　放物線 $y=x^2$ 上の点 A$(a,\ a^2)$ における接線 l と，点 B$(b,\ b^2)$ における接線 m との交点をCとおく．ただし，$a<b$ とする．

(1)　2直線 l，m と放物線 $y=x^2$ とで囲まれる部分の面積 S を a と b で表せ．

(2)　点Cが放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2-x-2$ の上を動くときの面積 S の最小値を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　a を定数とし，x の 2 次関数 $f(x)$，$g(x)$ を次のように定める．

$$f(x)=x^2-3 \qquad g(x)=-2(x-a)^2+\frac{a^2}{3}$$

(1)　2 つの放物線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が 2 つの共有点をもつような a の範囲を求めよ．

(2)　(1)で求めた範囲に属する a に対して，2 つの放物線によって囲まれる図形を C_a とする．C_a の面積を a で表せ．

(3)　a が(1)で求めた範囲を動くとき，少なくとも 1 つの C_a に属する点全体からなる図形の面積を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第４講　微分法・積分法②

1 平面上に放物線 $y=x^2-5x+6$ と直線 $y=kax-a^2-5a$ がある．

(1) すべての実数 a に対して放物線と直線が異なる 2 点で交わるような定数 k の範囲を求めよ．

(2) (1)で求めた範囲にあって，放物線と直線で囲まれる部分の面積が a によらず一定になるような定数 k を求めよ．

(1) 放物線 $y=x^2-5x+6$ と直線 $y=kax-a^2-5a$ の交点の x 座標は

$x^2-5x+6=kax-a^2-5a$　つまり　$x^2-(ka+5)x+a^2+5a+6=0$　……①　の 2 解．

①が a に関わらず異なる 2 実数解をもてばよい．よって①の判別式を D_1 とすると

$D_1=(ka+5)^2-4(a^2+5a+6)=(k^2-4)a^2+2(5k-10)a+1$　これを $f(a)$ とすると

$f(a)>0$ がすべての実数 a で成り立てばよい．

$k=2$ のとき　$f(a)=1>0$ より成立．

$k=-2$ のとき　$f(a)=-40a+1>0$　これはすべての a では成立せず不適．

$k\neq\pm2$ のとき　$f(a)$ は 2 次関数．

よって　$k^2-4>0$　かつ　$f(a)=0$ で判別式 $D_2<0$ であればよい．

$k^2-4>0$ より　$k<-2,\ 2<k$

$$\frac{D_2}{4}=(5k-10)^2-(k^2-4)<0 \qquad 6k^2-25k+26<0$$

$$(k-2)(6k-13)<0 \qquad 2<k<\frac{13}{6}$$

以上より　$\boldsymbol{2\leqq k<\frac{13}{6}}$

(2) $2\leqq k<\dfrac{13}{6}$ のとき，①の 2 解を $\alpha,\ \beta$ $(\alpha<\beta)$ とすると

$$\alpha=\frac{ka+5-\sqrt{f(a)}}{2},\ \beta=\frac{ka+5+\sqrt{f(a)}}{2}$$

このとき，題意の放物線と直線で囲まれる部分の面積は

$$S=\int_\alpha^\beta\{(kax-a^2-5a)-(x^2-5x+6)\}dx=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$\beta-\alpha=\sqrt{f(a)}$ より　S すなわち $f(a)$ が a によらず一定になるのは

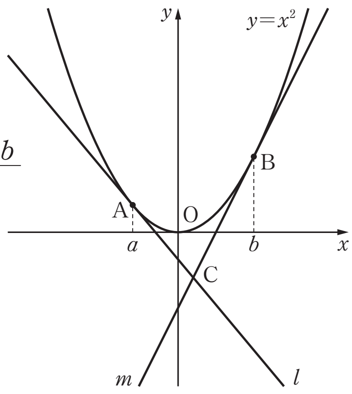
$k^2-4=0$　かつ　$5k-10=0$　のときである．　ゆえに　$\boldsymbol{k=2}$

2 放物線 $y=x^2$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$ における接線 l と，点 $\mathrm{B}(b,\ b^2)$ における接線 m との交点を C とおく．ただし，$a<b$ とする．

(1) 2 直線 $l,\ m$ と放物線 $y=x^2$ とで囲まれる部分の面積 S を a と b で表せ．

(2) 点 C が放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2-x-2$ の上を動くときの面積 S の最小値を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。



(1)　$y=x^2$ より $y'=2x$

接線 l の方程式は　$y=2a(x-a)+a^2=2ax-a^2$

接線 m の方程式は　$y=2bx-b^2$

この2式より y を消去して　$2ax-a^2=2bx-b^2$　　$x=\dfrac{a+b}{2}$

よって l と m の交点Cの座標は　$\left(\dfrac{a+b}{2},\ ab\right)$

題意の面積は

$$S=\int_a^{\frac{a+b}{2}}\{x^2-(2ax-a^2)\}dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\{x^2-(2bx-b^2)\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-a)^3\right]_a^{\frac{a+b}{2}}+\left[\frac{1}{3}(x-b)^3\right]_{\frac{a+b}{2}}^{b}=\frac{1}{3}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3-\frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^3=\boldsymbol{\frac{1}{12}(b-a)^3}$$

(2)　C$(X,\ Y)$ とおくと　$X=\dfrac{a+b}{2}$，$Y=ab$

Cが放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2-x-2$ 上の点より　$Y=\dfrac{1}{2}X^2-X-2$

ここで　$(b-a)^2=(a+b)^2-4ab=4X^2-4Y=2X^2+4X+8=2(X+1)^2+6$　より

$b-a$ は，$X=-1$ のとき最小値 $\sqrt{6}$ となる．よって，求める S の最小値は

$$\frac{1}{12}(\sqrt{6})^3=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{2}}$$

3　a を定数とし，x の2次関数 $f(x)$，$g(x)$ を次のように定める．

$$f(x)=x^2-3 \qquad g(x)=-2(x-a)^2+\frac{a^2}{3}$$

(1)　2つの放物線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が2つの共有点をもつような a の範囲を求めよ．

(2)　(1)で求めた範囲に属する a に対して，2つの放物線によって囲まれる図形を C_a とする．C_a の面積を a で表せ．

(3)　a が(1)で求めた範囲を動くとき，少なくとも1つの C_a に属する点全体からなる図形の面積を求めよ．

(1)　$f(x)=g(x)$ より　$9x^2-12ax+5a^2-9=0$　……①

①の判別式を D とすると，①が異なる2実数解をもつのは

$$\frac{D}{4}=36a^2-9(5a^2-9)=-9a^2+81>0$$ のとき　　ゆえに　$\boldsymbol{-3<a<3}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　①の 2 解を α，β ($\alpha<\beta$) とすると，$x=\dfrac{6a\pm\sqrt{\dfrac{D}{4}}}{9}=\dfrac{6a\pm3\sqrt{9-a^2}}{9}=\dfrac{2a\pm\sqrt{9-a^2}}{3}$

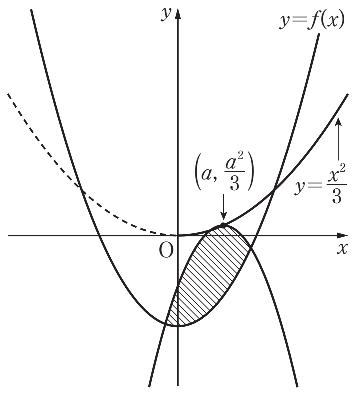
より　$\alpha=\dfrac{2a-\sqrt{9-a^2}}{3}$，$\beta=\dfrac{2a+\sqrt{9-a^2}}{3}$

よって，C_a の面積は

$$\int_\alpha^\beta\{g(x)-f(x)\}dx=-3\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\sqrt{9-a^2}\right)^3$$

$$=\boldsymbol{\frac{4}{27}(9-a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(3)　$y=g(x)$ のグラフの頂点は $\left(a,\ \dfrac{a^2}{3}\right)$



これは放物線 $y=\dfrac{x^2}{3}$ 上にある．

a が(1)の範囲を動くとき右図より

題意の図形は $y\geqq f(x)$ の表す領域と

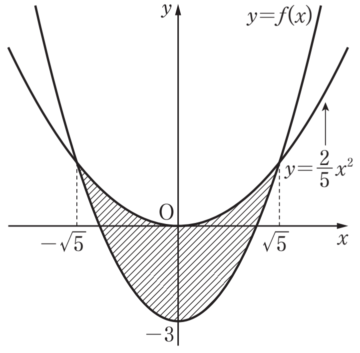
放物線 $y=g(x)$ の通過領域の共通部分である．

ここで　$g(x)=y=-2x^2+4ax-\dfrac{5}{3}a^2$ のグラフが，

ある点 $(X,\ Y)$ を通ることは

$Y=-2X^2+4aX-\dfrac{5}{3}a^2$，すなわち　$5a^2-12Xa+6X^2+3Y=0$　を満たす実数 a が存在することと同値であり，それはこの a に関する 2 次方程式の判別式が 0 以上になることである．

$36X^2-5(6X^2+3Y)\geqq0$　　$Y\leqq\dfrac{2}{5}X^2$　　これが　$y=g(x)$ のグラフ上の点 $(X,\ Y)$ が満たすべき領域，すなわち通過領域である．



$y=f(x)$ と $y=\dfrac{2}{5}x^2$ のグラフの交点の x 座標は

$x=\pm\sqrt{5}$

ゆえに求める面積は

$$2\int_0^{\sqrt{5}}\left\{\frac{2}{5}x^2-(x^2-3)\right\}dx=2\left[-\frac{1}{5}x^3+3x\right]_0^{\sqrt{5}}=\boldsymbol{4\sqrt{5}}$$

$\left(\text{または}\displaystyle\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}\left\{\frac{2}{5}x^2-(x^2-3)\right\}dx\right.$

$$\left.=\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}-\frac{3}{5}(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})dx=-\frac{3}{5}\cdot\left\{-\frac{1}{6}(2\sqrt{5})^3\right\}=\boldsymbol{4\sqrt{5}}\right)$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　xy 平面上に直線 $l：y=x+2$ と曲線 $C：y=1-x^2$ がある．直線 l 上を動く点Ｐから曲線 C に異なる２本の接線を引き，接点をＱ，Ｒとする．線分 QR の中点をＭとするとき，次の問いに答えよ．

(1)　点Ｐの x 座標を t とし，２点Ｑ，Ｒの x 座標をそれぞれ α，β とするとき，$\alpha+\beta=2t$ および $\alpha\beta=-(t+1)$ を示せ．

(2)　点Ｍの軌跡と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　動点 $\mathrm{Q}(u,\ v)$，$\mathrm{P}(x,\ y)$ の座標の間に $x=u+v$，$y=u^2+v^2$ という関係がある．点Q が $(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 1)$ を3頂点とする三角形の周上を動くとき，点Pが描く軌跡を図示せよ．また，その図形で囲まれた部分の面積を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1 xy 平面上に直線 l：$y=x+2$ と曲線 C：$y=1-x^2$ がある．直線 l 上を動く点Ｐから曲線 C に異なる２本の接線を引き，接点をＱ，Ｒとする．線分QRの中点をＭとするとき，次の問いに答えよ．

(1) 点Ｐの x 座標を t とし，２点Ｑ，Ｒの x 座標をそれぞれ α，β とするとき，$\alpha+\beta=2t$ および $\alpha\beta=-(t+1)$ を示せ．

(2) 点Ｍの軌跡と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

(1) C：$y=-x^2+1$ より　$y'=-2x$

$x=s$ におけるこの式の接線の方程式は　$y=-2s(x-s)-s^2+1$

すなわち　$y=-2sx+s^2+1$

これが l 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t+2)$ を通るとき　$t+2=-2st+s^2+1$

つまり　$s^2-2ts-(t+1)=0$　この方程式の異なる２解が点Ｑ，Ｒの x 座標 α，β である．

よって，解と係数の関係より　$\alpha+\beta=2t$，$\alpha\beta=-(t+1)$　である．

【別解】　$x=\alpha$，$x=\beta$ における C の接線の方程式はそれぞれ

$y=-2\alpha x+\alpha^2+1$，$y=-2\beta x+\beta^2+1$

これらがともに点 $\mathrm{P}(t,\ t+2)$ を通るとき

$t+2=-2\alpha t+\alpha^2+1$，$t+2=-2\beta t+\beta^2+1$

つまり　$\alpha^2-2t\alpha-(t+1)=0$　かつ　$\beta^2-2t\beta-(t+1)=0$　である．

これらは　α，β が２次方程式　$s^2-2ts-(t+1)=0$　の２解であることを示す．

よって，解と係数の関係より　$\alpha+\beta=2t$，$\alpha\beta=-(t+1)$　である．

【別解】の考え方は円の「極線」を作るときによく用いられる解答である．

(2) $\mathrm{M}(X,\ Y)$ とすると

$$X=\frac{\alpha+\beta}{2}=t$$

$$Y=\frac{(1-\alpha^2)+(1-\beta^2)}{2}=-\frac{1}{2}\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}+1=-\frac{1}{2}(4t^2+2t+2)+1=-2t^2-t$$

よって　$Y=-2X^2-X$　より　Ｍの軌跡は放物線　$y=-2x^2-x=-x(2x+1)$

これと x 軸によって囲まれる部分の面積は

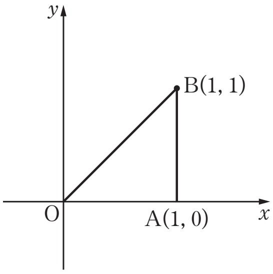
$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0}-x(2x+1)\,dx=\frac{2}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3=\boldsymbol{\frac{1}{24}}$$

← $\displaystyle\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　動点 Q$(u,\ v)$，P$(x,\ y)$ の座標の間に $x=u+v$，$y=u^2+v^2$ という関係がある．点 Q が $(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 1)$ を 3 頂点とする三角形の周上を動くとき，点 P が描く軌跡を図示せよ．また，その図形で囲まれた部分の面積を求めよ．

O$(0,\ 0)$，A$(1,\ 0)$，B$(1,\ 1)$ とする．



点 Q が OA 上を動くとき

$0 \leqq u \leqq 1$，$v=0$

よって　$x=u$，$y=u^2$　より

$y=x^2$　$(0 \leqq x \leqq 1)$

点 Q が AB 上を動くとき

$u=1$，$0 \leqq v \leqq 1$

よって　$x=1+v$，$y=1+v^2$　より

$y=(x-1)^2+1$　$(1 \leqq x \leqq 2)$

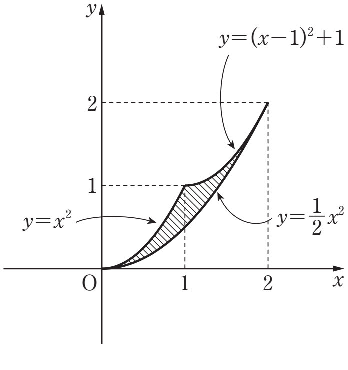
点 Q が BO 上を動くとき

$v=u$，$0 \leqq u \leqq 1$

よって　$x=2u$，$y=2u^2$　より

$y=\dfrac{1}{2}x^2$　$(0 \leqq x \leqq 2)$

以上より，P$(x,\ y)$ の動く軌跡は右図実線部分．



これにより囲まれた部分の面積は

$$\int_0^1 x^2dx+\int_1^2\{(x-1)^2+1\}dx-\int_0^2\frac{1}{2}x^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+\left[\frac{(x-1)^3}{3}+x\right]_1^2-\left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+2-1-\frac{4}{3}=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

動くときの状態の場合分けは問題なかったであろう．
面積の立式だが，ポイントは２つ．
①境界の下側は常に $y=\dfrac{1}{2}x^2$ であるから，後からまとめて引く．
②平方完成されている式をそのまま利用して積分（軸が端点になっている）
今回はこれを利用しなくても時間的な差はみられないが，どのように $\int$ すると計算の速度と正確性が上がるのかはさまざまな問題を通じて学ぶことが必要である．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。